

雅礼中学 2021 届高考模拟卷(一)

数 学

命题人:伊波 审题人:雅礼中学高三数学备课组

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 8 页。时量 120 分钟。满分 150 分。

第 I 卷

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 2x - 3 > 0\}$, 则 $A \cap B =$ (D)

- A. $(-3, -\frac{3}{2})$ B. $(-3, \frac{3}{2})$ C. $(1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 3)$

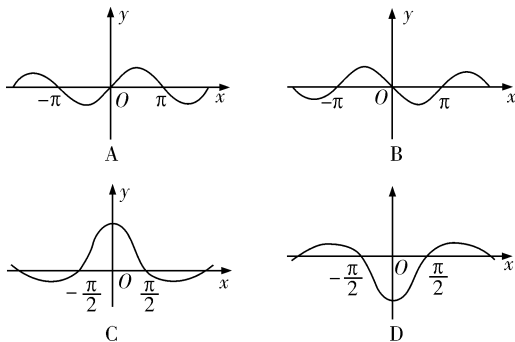
2. 若 $z = 1 + 2i$, 则 $\frac{4i}{z \cdot \bar{z} - 1} =$ (C)

- A. 1 B. -1 C. i D. -i

3. 设 $a = 6^{0.4}$, $b = \log_{0.4} 0.5$, $c = \log_8 0.4$, 则 a, b, c 的大小关系是 (B)

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

4. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 (A)



5. 某人在同一群体中调查了人们对 6 杯饮品口味的看法, 得到数据如表:

饮品	第 1 杯	第 2 杯	第 3 杯	第 4 杯	第 5 杯	第 6 杯
好评率	0.13	0.52	0.22	0.45	0.98	0.30
差评率	0.87	0.48	0.78	0.55	0.02	0.70

根据这些数据, 可知这一群体意见分歧较大的两杯饮品是

- A. 第 1 杯与第 3 杯 B. 第 2 杯与第 4 杯
C. 第 1 杯与第 5 杯 D. 第 3 杯与第 5 杯

【解析】第 1 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.87 - 0.13 = 0.74$,

第 2 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.52 - 0.48 = 0.04$,

第 3 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.78 - 0.22 = 0.56$,

第 4 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.55 - 0.45 = 0.1$,

第 5 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.98 - 0.02 = 0.96$,

第 6 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.70 - 0.30 = 0.4$,

其中较小的差值为第 2 杯与第 4 杯, 故选 B.

6. 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左焦点 F_1 作一条直线 l 交双曲线左支于 P, Q 两点, 若 $|PQ| = 4$, F_2 是双曲线的右焦点, 则 $\triangle PF_2Q$ 的周长是 (D)

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

【解析】由题意, 得 $|PF_2| - |PF_1| = 2$, $|QF_2| - |QF_1| = 2$.

$\because |PF_2| + |QF_2| - |PQ| = 4, \therefore |PF_2| + |QF_2| - 4 = 4, \therefore |PF_2| + |QF_2| = 8$.

$\therefore \triangle PF_2Q$ 的周长是 $|PF_2| + |QF_2| + |PQ| = 8 + 4 = 12$.

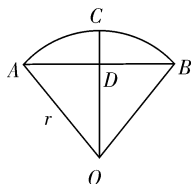
7. 《掷铁饼者》取材于古希腊的体育竞技活动, 刻画的是一名强健的男子在掷铁饼过程中最具有表现力的瞬间. 现在把掷铁饼者张开的双臂及肩近似看成一张“弓”, 掷铁饼者的肩宽约为 $\frac{\pi}{8}$ 米, 一只手臂长约为 $\frac{\pi}{4}$ 米, “弓”所在圆的半径约为 $\frac{15}{16}$ 米, 则掷铁饼者双手之间的直线距离约为 (C)

A. $\frac{15}{16}$ 米 B. $\frac{15\sqrt{2}}{16}$ 米
C. $\frac{15\sqrt{3}}{16}$ 米 D. $\frac{15\sqrt{3}}{32}$ 米



【解析】如图所示, 弓所在弧 $\widehat{AB}$ 长为 $l = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$ 米, 则其对应的圆心角 $\angle AOB = \alpha$

$$= \frac{\frac{5\pi}{8}}{\frac{15}{16}} = \frac{2\pi}{3},$$



则两手之间的距离为 $AB = 2r \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{15}{16} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{16}$ 米, 故选 C.

8. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + t$ ($\omega > 0$), 点 P, Q, R 是直线 $y = m$ ($m > 0$) 与函数 $f(x)$ 的图象自左至右的某三个相邻交点, 且 $2|PQ| = |QR| = \frac{2\pi}{3}$. 若对 $\forall a, b, c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 以 $f(a), f(b), f(c)$ 的值为边长可以构成一个三角形, 那么实数 t 的取值范围是 (D)
- A. $(1, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

【解析】函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + t$ ($\omega > 0$), 由 $2|PQ| = |QR| = \frac{2\pi}{3}$, 解得 $|PQ| = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore T = |PQ| + |QR| = \pi, \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2. \therefore f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + t$,

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$,

$\therefore 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 2], \therefore f(x) \in [-1 + t, 2 + t]$,

由题意可得 $f(a) + f(b) > f(c)$ 对任意的 $a, b, c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立,

$\therefore (f(a) + f(b))_{\min} > (f(c))_{\max}$,

$\therefore f(a) + f(b) \geq -1 + t - 1 + t = -2 + 2t, f(c) \leq t + 2$,

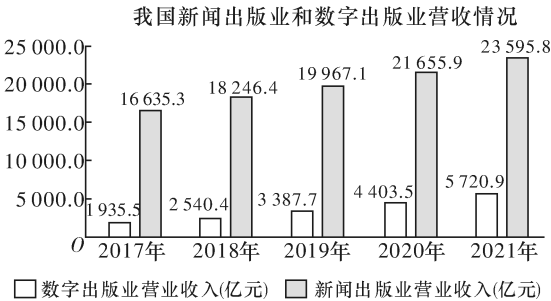
$\therefore -2 + 2t > t + 2$, 解得 $t > 4$.

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

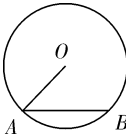
9. 若 $b < a < 0$, 则下列结论正确的是 (ABC)

A. $a^2 < b^2$ B. $ab < b^2$
C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $|a| + |b| > |a + b|$

10. 新闻出版业不断推进供给侧结构性改革, 深入推动优化升级和融合发展, 持续提高优质出版产品供给, 实现了行业的良性发展. 下面是 2017 年至 2021 年我国新闻出版业和数字出版业营收情况, 则下列说法正确的是 (ABD)



- A. 2017 年至 2021 年我国新闻出版业和数字出版业营收均逐年增加
 B. 2021 年我国数字出版业营收超过 2017 年我国数字出版业营收的 2 倍
 C. 2021 年我国新闻出版业营收超过 2017 年我国新闻出版业营收的 1.5 倍
 D. 2021 年我国数字出版业营收占新闻出版业营收的比例未超过三分之一
11. 如图, AB 是圆 O (O 为圆心) 的一条弦, 由下列一个条件能确定 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ 值的有 (BD)
- A. 已知圆的半径长
 B. 已知弦长 $|AB|$
 C. 已知 $\angle OAB$ 大小
 D. 已知圆的半径长和 $\angle OAB$ 大小



12. 已知函数 $y=f(x), x \in A$, 且 $\pi \in A$, 函数 $y=f(x), x \in A$ 的图象绕坐标原点顺时针旋转 $\frac{n\pi}{4}$ 所得新的函数图象与原函数图象重合, 其中 n 可以取任意正整数, 则 $f(\pi)$ 的值不可能为 (AC)
- A. 0 B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ C. π D. $\sqrt{3}\pi$

【解析】若 $f(\pi)=0$, 则通过连续顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 依次可得 $f\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}, f(0)=-\pi, f\left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}, f(-\pi)=0, f\left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$, 此时 $x=-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ 对应 $y=\pm\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$, 不符合函数概念, 所以 A 选项不可能对, 同理 C 选项也不可能对, 而 BD 有可能成立. 所以选择 AC.

选择题答题卡

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	D	C	B	A	B	D	C	D	ABC	ABD	BD	AC

第 II 卷

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_2=3, S_4=15$, 则公比 q 等于 2.

【解析】因为 $S_2=3, S_4=15, S_4-S_2=12$, 所以 $\begin{cases} a_1+a_2=3, \\ a_3+a_4=12, \end{cases}$

两个方程左右两边分别相除, 得 $q^2=4$, 因为数列是正项等比数列, 所以 $q=2$.

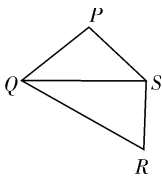
14. 若抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $P(2, y_0)$ 到其准线的距离为 4, 则抛物线的标准方程为 $y^2=8x$.

15. 某学校从 6 男 2 女共 8 名学生中选出队长 1 人, 副队长 1 人, 普通队员 2 人组成 4 人乒乓球队, 要求球队中至少有 1 名女生, 则共有 660 种不同的选法.

【解析】方法一：只有 1 名女生时，先选 1 名女生，有 C_2^1 种方法；再选 3 名男生，有 C_3^3 种方法；然后排队长、副队长位置，有 A_4^2 种方法。由分步乘法计数原理知，共有 $C_2^1 C_3^3 A_4^2 = 480$ (种) 选法。有 2 名女生时，再选 2 名男生，有 C_2^2 种方法；然后排队长、副队长位置，有 A_4^2 种方法。由分步乘法计数原理知，共有 $C_2^2 A_4^2 = 180$ (种) 选法。所以依据分类加法计数原理知，共有 $480 + 180 = 660$ (种) 不同的选法。

方法二：不考虑限制条件，共有 $A_5^3 C_2^2$ 种不同的选法，而没有女生的选法有 $A_3^3 C_2^2$ 种，故至少有 1 名女生的选法有 $A_5^3 C_2^2 - A_3^3 C_2^2 = 840 - 180 = 660$ (种)。

16. 如图，在平面四边形 $PQRS$ 中， $\angle QPS = \frac{\pi}{2}$ ， $\angle QSR = \frac{\pi}{2}$ ， $PQ = PS = SR = 2$ 。将该平面图



形沿线 QS 折成一个直二面角 $P-QS-R$ ，三棱锥 $P-QRS$ 的体积为 $\frac{4}{3}$ ；三棱锥

$P-QRS$ 的外接球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$ 。

【解析】因为平面 $PQS \perp$ 平面 QRS ， $QS \perp SR$ ，则 $SR \perp$ 平面 PQS ，从而 $SR \perp PQ$ 。因为 $PQ \perp PS$ ，则 $PQ \perp$ 平面 PRS ，从而 $PQ \perp PR$ ，所以 QR 是外接球的直径。在 $Rt\triangle QSR$ 中， $QR = \sqrt{QS^2 + SR^2} = 2\sqrt{3}$ ，则球半径 $R = \sqrt{3}$ ，所以外接球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi$ ，四面体 $PQRS$ 的体积为 $\frac{4}{3}$ 。

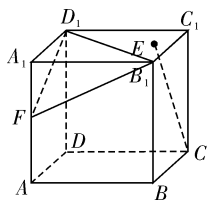
四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上底面内有一点 E ，点 F 为线段 AA_1 的中点。

(1) 经过点 E 在上底面画出一条线 l 与 CE 垂直，并说明画出这条线的理由；

(2) 若点 E 为线段 A_1C_1 靠近 C_1 的三等分点，求 CE 与平面 FB_1D_1 所成角的正切值。



【解析】(1) 如图所示，连接 C_1E ，在上底面过点 E 作直线 $l \perp C_1E$ 即可，

因为 $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，所以 $CC_1 \perp l$ 。根据作法知 $l \perp C_1E$ ，

又因为 $C_1E \cap C_1C = C_1$ ，所以 $l \perp$ 平面 CC_1E ，所以 $l \perp CE$ 。..... 4 分

(2) 以 D 为坐标原点， DA, DC, DD_1 所在直线为 x, y, z 轴，如图建立空间直角坐标系，

设 $DA = 2$ ，平面 FB_1D_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ ，

$$\overrightarrow{D_1B_1} = (2, 2, 0), \overrightarrow{D_1F} = (2, 0, -1), \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{D_1B_1} \cdot \mathbf{m} = 2x + 2y = 0, \\ \overrightarrow{D_1F} \cdot \mathbf{m} = 2x - z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$ ，则 $y = -1, z = 2$ ，所以平面 FB_1D_1 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, -1, 2)$ 。

$$\overrightarrow{CE} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 2 \right),$$

设 CE 与平面 FB_1D_1 所成角的大小为 θ ，则

$$\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{CE} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CE}}{|\mathbf{m}| |\overrightarrow{CE}|} \right| = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 4}{\sqrt{1+1+4} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + 4}} = \frac{8}{\sqrt{66}}.$$

所以 CE 与平面 FB_1D_1 所成角的正切值为 $4\sqrt{2}$ 。..... 10 分

18. (本题满分 12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $a = 1, b = 2, \cos C = \frac{1}{4}$ 。

(1) 求 $\triangle ABC$ 的周长。

(2) 求 $\cos(A-C)$ 的值。

【解析】(1) $\because c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 1 + 4 - 4 \times \frac{1}{4} = 4, \therefore c = 2$ 。

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 1 + 2 + 2 = 5$ 。..... 5 分

(2) ∵ $\cos C = \frac{1}{4}, \therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$

∴ $\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$

∵ $a < c, \therefore A < C$, 故 A 为锐角,

∴ $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2} = \frac{7}{8}.$

∴ $\cos(A - C) = \cos A \cos C + \sin A \sin C = \frac{7}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{11}{16}.$ 12 分

19. (本题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2^n - 1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2, b_{n+1} - 2b_n = 8a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【解析】(1) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}.$

$a_1 = 1$ 也适合 $a_n = 2^{n-1}$,

因此, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}.$ 4 分

(2) ∵ $b_{n+1} - 2b_n = 8a_n = 2^{n+2},$

等式两边同时除以 2^{n+1} 得, $\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{b_n}{2^n} = 2,$ 且 $\frac{b_1}{2} = 1.$

∴ 数列 $\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$ 是以 1 为首项, 以 2 为公差的等差数列,

∴ $\frac{b_n}{2^n} = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1,$

∴ $b_n = (2n - 1) \cdot 2^n.$ 8 分

∴ $T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n - 1) \cdot 2^n,$

得 $2T_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + (2n - 3) \cdot 2^n + (2n - 1) \cdot 2^{n+1},$

两式相减得 $-T_n = 2^1 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + 2 \times 2^n - (2n - 1) \cdot 2^{n+1}$

$= 2 + \frac{2^3(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - (2n - 1) \cdot 2^{n+1} = (3 - 2n) \cdot 2^{n+1} - 6,$

因此 $T_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1} + 6.$ 12 分

20. (本题满分 12 分)

某工厂的一条流水线上生产一种产品, 已知该产品的合格率为 0. 98. 为了监控该流水线的生产情况, 检验员每隔 6 个小时就需要从流水线上随机抽取 5 件产品进行检验(检验后的产品按废品处理, 每天检验 4 次), 如发现其中有不合格品, 则马上去调整生产设备. 各产品是否为不合格品是相互独立的.

(1) 求每次检验后, 需要调整设备的概率(结果保留两位小数).

(2) 用 X 表示检验员一天内需要调整设备的次数, 求 X 的分布列及数学期望.

(3) 用 Y 表示检验员一周(7 天)内共发现的不合格品数, 用这一周内不合格品数的比例估计该产品的不合格品率, 求其绝对误差(即估计值与真实值之差的绝对值)不超过 0. 005 的概率(结果保留两位小数).

参考数据: $0. 98^3 \approx 0. 94, 0. 98^4 \approx 0. 92, 0. 98^5 \approx 0. 90, C_{140}^5 0. 98^{135} \approx 27102759, C_{140}^4 0. 98^{136} \approx 981095,$
 $C_{140}^3 0. 98^{137} \approx 28198, C_{140}^2 0. 98^{138} \approx 603.$

【解析】(1)每次检验后,需要调整设备的概率为 $p=1-0.98^5\approx 0.10$ 2 分

(2)由题设知 $X\sim B(4,0.1)$, X 的可能取值为 $0,1,2,3,4$, 则

$$P(X=k)=C_4^k \cdot 0.1^k \cdot 0.9^{4-k} (k=0,1,2,3,4),$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.6561	0.2916	0.0486	0.0036	0.0001

数学期望为 $E(X)=4\times 0.1=0.4$ 8 分

(3)由题设知,即求

$$P\left(\left|\frac{Y}{140}-0.02\right|\leqslant 0.005\right)=P(2.1\leqslant Y\leqslant 3.5)=P(Y=3)=C_{140}^3 0.02^3 0.98^{137}\approx 0.23. 12 分$$

21. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ax\ln x-bx^2-ax$.

(1)曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+y+\frac{1}{2}=0$, 求 a, b 的值;

(2)若 $a\leqslant 0, b=\frac{1}{2}$ 时, $\forall x_1, x_2\in (1, e)$, 都有 $\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|}<3$, 求 a 的取值范围.

【解析】(1)由题意, $f'(x)=a(1+\ln x)-2bx-a=a\ln x-2bx$,

由 $f'(1)=-2b=-1$, 得 $b=\frac{1}{2}$, 又 $f(1)=-b-a=-\frac{3}{2}$, $\therefore a=1$.

即 $a=1, b=\frac{1}{2}$ 4 分

(2)当 $a\leqslant 0, b=\frac{1}{2}, x\in (1, e)$ 时, $f'(x)=a\ln x-x<0$,

$f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 6 分

不妨设 $x_1<x_2$, 则 $f(x_1)>f(x_2)$, 原不等式即为 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}<3$.

即 $f(x_1)-f(x_2)<3x_2-3x_1$, 即 $f(x_1)+3x_1<f(x_2)+3x_2$.

令 $g(x)=f(x)+3x$, 则 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上为单调增函数,

$\therefore$ 有 $g'(x)=f'(x)+3=a\ln x-x+3\geqslant 0$ 在 $(1, e)$ 上恒成立. 8 分

即 $a\geqslant \frac{x-3}{\ln x}, x\in (1, e)$, 令 $h(x)=\frac{x-3}{\ln x}, x\in (1, e), h'(x)=\frac{\ln x+\frac{3}{x}-1}{(\ln x)^2}$,

令 $t(x)=\ln x+\frac{3}{x}-1, t'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{x-3}{x^2}<0$.

$\therefore t(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, $t(x)>t(e)=\frac{3}{e}$,

则 $h'(x)>0, h(x)$ 在 $(1, e)$ 上为单调增函数,

$\therefore h(x)<h(e)=e-3$, 即 $a\geqslant e-3$.

综上, $e-3\leqslant a\leqslant 0$ 12 分

22. (本题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a>b>0)$, 连接椭圆上任意两点的线段叫作椭圆的弦, 过椭圆中心的弦叫做椭圆

的直径. 若椭圆的两直径的斜率之积为 $-\frac{b^2}{a^2}$, 则称这两直径为椭圆的共轭直径. 特别地, 若一条直径所在的

斜率为 0, 另一条直径的斜率不存在时, 也称这两直径为共轭直径. 现已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(1) 已知点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right), B\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 E 上两定点, 求 AB 的共轭直径的端点坐标.

(2) 过点 $(-\sqrt{3}, 0)$ 作直线 l 与椭圆 E 交于 A_1, B_1 两点, 直线 A_1O 与椭圆 E 的另一个交点为 A_2 , 直线 B_1O 与椭圆 E 的另一个交点为 B_2 . 当 $\triangle A_1OB_1$ 的面积最大时, 直径 A_1A_2 与直径 B_1B_2 是否共轭, 请说明理由.

(3) 设 CD 和 MN 为椭圆 E 的一对共轭直径, 且线段 CM 的中点为 T . 已知点 P 满足: $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OT}$, 若点 P 在椭圆 E 的外部, 求 λ 的取值范围.

【解析】(1) 由题设知 $k_{AB} = \frac{3}{2}$, 设所求直线方程为: $y = kx$, 则 $k \cdot k_{AB} = -\frac{3}{4}$, 则 $k = -\frac{1}{2}$,

故共轭直径所在直线方程为: $y = -\frac{1}{2}x$.

联立椭圆与 $y = -\frac{1}{2}x$, 可得: $x^2 = 3, x = \pm\sqrt{3}$.

故端点坐标为 $(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 和 $(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 4 分

(2) 由题设知, l 不与 x 轴重合, 故设 $l: x = my - \sqrt{3}$,

联立方程: $\begin{cases} x = my - \sqrt{3}, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (3m^2 + 4)y^2 - 6\sqrt{3}my - 3 = 0,$

则 $y_1 + y_2 = \frac{6\sqrt{3}m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-3}{3m^2 + 4}, x_1 x_2 = \frac{12 - 12m^2}{3m^2 + 4},$

$S = \frac{\sqrt{3}}{2} |y_1 - y_2| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3m^2 + 1}}{3m^2 + 4} = \frac{6\sqrt{3m^2 + 1}}{3m^2 + 4} = \frac{6}{\sqrt{3m^2 + 1} + \frac{3}{\sqrt{3m^2 + 1}}} \leq \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$

当且仅当 $3m^2 + 1 = 3$, 即 $m^2 = \frac{2}{3}$ 时取等号,

此时 $k_{A_1A_2} \cdot k_{B_1B_2} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{-3}{12 - 12m^2} = -\frac{3}{4} = -\frac{b^2}{a^2}$, 故直径 A_1A_2 与直径 B_1B_2 共轭. 8 分

(3) 法 1: 设点 $C(x_1, y_1), M(x_2, y_2)$, 则 $T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

代入 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OT}$, 可得: $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \lambda, \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \lambda\right)$.

若 P 在椭圆 E 的外部, 则有: $\frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \lambda\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \lambda\right)^2}{3} > 1,$

即 $\lambda^2 [3(x_1 + x_2)^2 + 4(y_1 + y_2)^2] > 48 \Rightarrow \lambda^2 [(3x_1^2 + 4y_1^2) + (3x_2^2 + 4y_2^2) + 6x_1x_2 + 8y_1y_2] > 48.$

又因为 C, M 均在椭圆 E 上, 则 $3x_1^2 + 4y_1^2 = 3x_2^2 + 4y_2^2 = 12$,

又 CD 和 MN 为椭圆 E 的一对共轭直径, 故 $k_{CD} \cdot k_{MN} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{3}{4}$, 即 $4y_1 y_2 + 3x_1 x_2 = 0$.

从而 $24\lambda^2 > 48$, 即 $\lambda^2 > 2$, 即 $\lambda > \sqrt{2}$, 或 $\lambda < -\sqrt{2}$ 12 分

法 2: 设点 $C(x_1, y_1), M(x_2, y_2)$,

当 CD 不与坐标轴重合时, 设 $l_{CD}: y = kx$, 则 $l_{MN}: y = -\frac{3}{4k}x$.

联立 $\begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 = \frac{12}{3 + 4k^2}, y_1^2 = \frac{12k^2}{3 + 4k^2}.$

同理可得: $x_2^2 = \frac{16k^2}{3 + 4k^2}, y_2^2 = \frac{9}{3 + 4k^2}.$

由椭圆的对称性,不妨设 C 在第一象限,则 M 必在第二象限或第四象限,

则 $x_1=\sqrt{\frac{12}{3+4k^2}},y_1=\sqrt{\frac{12k^2}{3+4k^2}},$

若 M 在第二象限,则 $x_2=-\sqrt{\frac{16k^2}{3+4k^2}},y_2=\sqrt{\frac{9}{3+4k^2}},$

从而 $T\left(\frac{\sqrt{\frac{12}{3+4k^2}}-\sqrt{\frac{16k^2}{3+4k^2}}}{2},\frac{\sqrt{\frac{12k^2}{3+4k^2}}+\sqrt{\frac{9}{3+4k^2}}}{2}\right),$

则 $P\left[\frac{\sqrt{\frac{12}{3+4k^2}}-\sqrt{\frac{16k^2}{3+4k^2}}}{2}\lambda,\frac{\sqrt{\frac{12k^2}{3+4k^2}}+\sqrt{\frac{9}{3+4k^2}}}{2}\lambda\right].$

又 P 在椭圆外,则 $3\left[\frac{\sqrt{\frac{12}{3+4k^2}}-\sqrt{\frac{16k^2}{3+4k^2}}}{2}\lambda\right]^2+4\left[\frac{\sqrt{\frac{12k^2}{3+4k^2}}+\sqrt{\frac{9}{3+4k^2}}}{2}\lambda\right]^2>12,$

化简可得: $\lambda^2>2$,即 $\lambda>\sqrt{2}$,或 $\lambda<-\sqrt{2}$.

若 M 在第四象限,同理可得 $\lambda^2>2$,即 $\lambda>\sqrt{2}$,或 $\lambda<-\sqrt{2}$.

当 CD 与 x 轴垂直或重合时,由椭圆的对称性,不妨取 $C(2,0),M(0,\sqrt{3})$,则 $P\left(\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right),$

又 P 在椭圆外,则 $3\lambda^2+4\cdot\frac{3}{4}\lambda^2>12\Rightarrow\lambda^2>2$,即 $\lambda>\sqrt{2}$,或 $\lambda<-\sqrt{2}$,

综上: $\lambda>\sqrt{2}$,或 $\lambda<-\sqrt{2}$ 12 分